Matematyka MAT1437

Semestr letni 2023/2024

Lista 3 (Układy równań różniczkowych liniowych)

1. Korzystając z metody eliminacji rozwiązać podane układy równań różniczkowych liniowych ze wskazanymi warunkami początkowymi:

   (a) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$

   (b) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

   (c) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

2. Sprawdzić, czy podane funkcje wektorowe tworzą na zadanych przedziałach uklady fundamentalne wskazanych ukladów równań różniczkowych liniowych:

   (a) $\boldsymbol{y}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \mathbb{R},$

   (b) $\boldsymbol{y}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 1 & t^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad (0, \infty),$

   (c) $\boldsymbol{y}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t^{-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -t^{-1} & -1 \\ -2t^{-2} & t^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad (-\infty, 0).$

3. Korzystając z poprzedniego zadania rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

   (a) $\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$

   (b) $\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 1 & t^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

   (c) $\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -t^{-1} & 1 \\ -2t^{-2} & t^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

4. Przy pomocy metody Eulera wyznaczyć układy fundamentalne podanych układów równań różniczkowych $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, jeżeli:

   (a) $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$,

   (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$,

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$,

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Korzystając z metody Eulera dla różnych rzeczywistych wartości własnych rozwiązać uklad równań $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ lub zagadnienie początkowe $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$, jeżeli:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$,

   (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6. Korzystając z metody Eulera dla różnych zespolonych wartości własnych rozwiązać układ równań $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ lub zagadnienie początkowe $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$, jeżeli:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$,

   (b) $A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$,

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

7. Metodą eliminacji wyznaczyć rozwiązania ogólne podanych niejednorodnych układów równań różniczkowych lub zagadnień początkowych:

   (a) $\begin{cases} x' = x - 2y + e^t \\ y' = x + 4y + e^{2t} \end{cases}$,

   (b) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 5\sin t \end{cases}$,

   (c) $\begin{cases} x' = 4x - 5y + 4t - 1 \\ y' = x - 2y + t \end{cases}$, $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.